

Zur Beseitigung von t -Matrix-Singularitäten bei nichtverschwindendem Gesamtimpuls*

VON STEPHAN BRAUN

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforsch. **19 a**, 1034—1050 [1964]; eingegangen am 21. Mai 1964)

As has been shown by TOMASINI it is possible to develop a perturbation theory for a many-fermion system by starting with a BOGOLJUBOV-transformed HAMILTONIAN having an energy gap in the unperturbed HAMILTONIAN. An investigation of the analogue to the BRUECKNER ladder approximation then shows this to be free of the COOPER-type divergencies of the original BRUECKNER t -matrix provided only zero total momentum of the pairs is taken into account. This paper extends the investigation to non-vanishing total momentum. For a separable potential and weak interaction it is shown that there are no divergencies for any total momentum. The reason for this (as in the case of zero total momentum) is the existence of the energy gap in the unperturbed spectrum.

Bei der Berechnung der Grundzustandsenergie eines Vielfermionensystems mit anziehenden Zweikörperkräften (etwa von Kernmaterie) durch teilweise aufsummierte Störungsrechnung¹ tritt eine charakteristische Konvergenzschwierigkeit auf, wenn man von einem System wechselwirkungsfreier Teilchen (HAMILTON-Operator H_0) als dem ungestörten System ausgeht. Sie ist bekannt als Singularität der BRUECKNERSchen t -Matrix² und besteht darin, daß der in dieser t -Matrix erfaßte Anteil der Störungsreihe nicht konvergiert. Diese Erscheinung hängt eng zusammen mit der Bildung gebundener sogen. COOPER-Paare³ und ist gleichbedeutend mit der Existenz sogen. lokalisierter Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung^{4, 5}.

Zur Beseitigung dieser Konvergenzschwierigkeit gibt es grundsätzlich zwei Wege:

1. In der t -Matrix ist nur derjenige Anteil der gesamten Störungsreihe erfaßt, der durch Aufsummation der sogen. „Leitergraphen“ entsteht⁶. Der Grund für die Auswahl gerade dieser Graphen ist, neben dem der mathematischen Einfachheit, daß sie für geringe Dichte des Fermionensystems den Hauptbeitrag liefern⁷. Es könnte also sein, daß sich bei Mitnahme weiterer Graphen die Konvergenz verbessert. Diese wegen der Vielzahl der möglichen Gra-

phen ziemlich komplizierte Frage ist z. B. bei KATZ⁸, KÜMMEL⁹ und YAMASAKI¹⁰ behandelt worden.

2. Diese Nichtkonvergenz eines Teiles der Störungsreihe kann aber auch ein Hinweis auf die Nichtkonvergenz der gesamten Störungsreihe sein. In der Tat zeigt die Theorie der Supraleitung nach BARDEEN-COOPER-SCHRIEFFER (BCS) und BOGOLJUBOV¹¹, daß ein Vielfermionensystem mit anziehender Zweiteilchenwechselwirkung eine störungstheoretisch nicht erfaßbare sogen. „Energilücke“ zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand des Systems aufweist; der „supraleitende“ Grundzustand des Systems ist nicht auf störungstheoretischem Wege aus dem des wechselwirkungsfreien Systems zu erhalten.

Vermutlich wird daher eine Störungsrechnung erfolgreicher sein, wenn man von einem neuen ungestörten HAMILTON-Operator H_0' ausgeht, dessen Spektrum die Energilücke bereits enthält, und der damit dem System besser angepaßt ist als das H_0 der wechselwirkungsfreien Teilchen; denn der Erfolg einer Störungsrechnung hängt wesentlich davon ab, daß das System bereits durch den ungestörten HAMILTON-Operator qualitativ einigermaßen gut beschrieben wird. Einen solchen HAMILTON-Operator H_0' erhält man aus dem vollständigen $H = H_0 + V$ durch

* D 7.

¹ K. A. BRUECKNER in C. DEWITT (Hrsg.), The Many-Body Problem, Dunod, Paris 1959 (Sommerschule Les Houches 1958).

² V. J. EMERY, Nucl. Phys. **12**, 69 [1959].

³ L. COOPER, Phys. Rev. **104**, 1189 [1956].

⁴ K. GOTTFRIED, An Inconsistency in the Perturbation Theory of the Real Fermi Gas, CERN, unveröffentlicht. — J. GOLDSTONE, unveröffentlicht. — G. LÜDERS, Z. Naturforsch. **14 a**, 1 [1959].

⁵ D. T. HAYES, Z. Naturforsch. **18 a**, 531 [1963].

⁶ J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **239**, 267 [1957].

⁷ N. M. HUGENHOLTZ, Physica **23**, 533 [1957].

⁸ A. KATZ, Nucl. Phys. **20**, 663 [1960].

⁹ H. KÜMMEL, Nucl. Phys. **22**, 177 [1961].

¹⁰ SH. YAMASAKI, Progr. Theor. Phys. **28**, 407 [1962].

¹¹ J. BARDEEN, L. COOPER u. J. SCHRIEFFER, Phys. Rev. **108**, 1175 [1957]. — N. N. BOGOLJUBOV, V. V. TOLMACHEV u. D. V. SHIRKOV, A New Method in the Theory of Superconductivity, Consultants Bureau, New York 1959.



eine BOGOLJUBOV-Transformation¹², bei der Teilchen und Löcher mit entgegengesetzt gleichen Impulsen gekoppelt werden (die Transformation bevorzugt damit den Gesamtimpuls Null). H_0' enthält den für die Energielücke verantwortlichen Anteil der Wechselwirkung, ist aber formal wie ein HAMILTON-Operator für freie sogen. Quasiteilchen gebaut. Der Rest H_{int} in der Zerlegung $H = H_0' + H_{\text{int}}$ wird dann wie früher V störungstheoretisch behandelt.

Im folgenden wird diese zweite Methode des Beseitigens der Konvergenzschwierigkeit durch eine BOGOLJUBOV-Transformation benutzt. Bildet man dann durch Aufsummation der Leitergraphen in der neuen Störungsrechnung das Analogon zur t -Matrix (im folgenden nach TOMASINI¹³ τ -Matrix genannt), so läßt sich für den Spezialfall einer Wechselwirkung von Paaren nur mit dem Gesamtimpuls $K = 0$ in der Tat zeigen, daß diese τ -Matrix nicht singularär wird, der durch sie erfaßte Anteil der Quasiteilchen-Störungsrechnung also konvergiert im Gegensatz zur t -Matrix für $K = 0$. Besonders einfach wird der Beweis für separierbares Potential (T); es zeigt sich dabei, daß die Berücksichtigung der Energielücke bereits im Ausgangsspektrum die Nichtsingularität der τ -Matrix bewirkt. Für nichtseparierbares Potential und Gesamtimpuls Null ist der dann etwas mühsamere Beweis für die Nichtsingularität der τ -Matrix bei BALIAN und MEHTA¹⁴ geführt.

Durch die BOGOLJUBOV-Transformation wird also die Singularität der t -Matrix bei $K = 0$ beseitigt. Nun wurde aber von HAYES⁵ durch Untersuchung der lokalisierten Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung gezeigt, daß die t -Matrix nicht nur für $K = 0$, sondern auch für nichtverschwindende Gesamtimpulse in einem kleinen, aber endlichen Bereich um $K = 0$ singularär wird. Es ist daher zu fragen, ob auch die τ -Matrix Singularitäten bei $K \neq 0$ besitzt, oder ob durch die BOGOLJUBOV-Transformation zugleich mit der Singularität der t -Matrix bei $K = 0$ auch die Singularitäten bei $K \neq 0$ beseitigt werden. In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage für ein (zur Vereinfachung der Rechnung gewähltes) separierbares Potential untersucht. Für schwache Wechselwirkung und hinreichend glatten Potentialverlauf besitzt die τ -Matrix auch für $K \neq 0$ keine Singularitäten; der wesentliche Grund hierfür ist, wie bei $K = 0$, die Existenz der Energielücke im Ausgangsspektrum.

Die verwendete spezielle BOGOLJUBOV-Transformation zum Gesamtimpuls Null genügt also, um nicht nur für diesen, sondern auch für alle übrigen Gesamtimpulse die Konvergenzschwierigkeit der Leiternäherung zu beseitigen. Eine Aussage über die Konvergenz der gesamten Quasiteilchen-Störungsrechnung ist allerdings auf Grund der nachgewiesenen Konvergenz eines (wenn auch vermutlich wichtigen) Anteils noch nicht möglich.

Im folgenden werden in Abschnitt 1 einige für die Untersuchung benötigte bekannte Ergebnisse referiert; das Matrixelement der τ -Matrix wird wie bei T angegeben. Das verwendete Verfahren zur Untersuchung der τ -Matrix für $K \neq 0$ wird am Ende von Abschnitt 1 skizziert und in Abschnitt 2 und 3 durchgeführt. Abschnitt 4 diskutiert das Ergebnis und erläutert es an einem numerischen Beispiel. Der Anhang faßt Einzelrechnungen der Abschnitte 2 und 3 zusammen.

1. τ -Matrix und charakteristische Funktion $A(K)$

Der HAMILTON-Operator des betrachteten Viel-ferrnionensystems lautet in zweiter Quantelung

$$H = H_0 + V = \sum_{ks} (\epsilon_k - \lambda) a_{ks}^+ a_{ks} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}_1 s_1, \mathbf{k}_2 s_2, \mathbf{k}_1' s_1', \mathbf{k}_2' s_2'} \langle \mathbf{k}_1 s_1, \mathbf{k}_2 s_2 | J | \mathbf{k}_2' s_2', \mathbf{k}_1' s_1' \rangle \times a_{\mathbf{k}_1 s_1}^+ a_{\mathbf{k}_2 s_2}^+ a_{\mathbf{k}_2' s_2'} a_{\mathbf{k}_1' s_1'} \quad (1)$$

Hierin ist $\epsilon_k = k^2/2m$ die kinetische Energie eines Teilchens ($\hbar = 1$) und $\langle \mathbf{k}_1 s_1, \mathbf{k}_2 s_2 | J | \mathbf{k}_2' s_2', \mathbf{k}_1' s_1' \rangle$ das Matrixelement des (spinunabhängig angenommenen) Zweiteilchenpotentials $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Die möglichen Werte von \mathbf{k} sind durch das Normierungsvolumen Ω in üblicher Weise diskret gemacht, der Spinindex s kann die Werte $+$ und $-$ annehmen. Die äußeren Indizes beziehen sich auf das erste, die inneren auf das zweite der beiden beteiligten Teilchen. Bei Beschränkung auf Gesamtimpuls Null ist $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ und $\mathbf{k}_1' = -\mathbf{k}_2'$. Wegen der Spinunabhängigkeit des Potentials gilt

$$\langle \mathbf{k}_1 s_1, \mathbf{k}_2 s_2 | J | \mathbf{k}_2' s_2', \mathbf{k}_1' s_1' \rangle = \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | J | \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1' \rangle \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'}; \quad (2a)$$

aus Translations- und GALILEI-Invarianz folgt

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | J | \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1' \rangle = \langle \mathbf{k} | J | \mathbf{k}' \rangle \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} \quad (2b)$$

¹² S. T. BELJAJEV in C. DEWITT (Hrsg.), The Many-Body Problem, Dunod, Paris 1959 (Sommerschule Les Houches 1958).

¹³ A. TOMASINI, Nuovo Cim. **20**, 963 [1961], im Text mit „T“ bezeichnet.

¹⁴ R. BALIAN u. M. L. MEHTA, Nucl. Phys. **31**, 587 [1962].

mit den Gesamt- und Relativimpulsen

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (3)$$

Zur (hier nicht durchgeführten) Herleitung der Gln. (6) bis (8) wird noch die Invarianz des Matrixelements gegen Zeitumkehr und Teilchenvertauschung benötigt. Der Faktor λ ist als LAGRANGESCHER Parameter zur Erhaltung der Teilchenzahl in üblicher Weise eingefügt; es muß in allen interessierenden Zuständen des Systems $\langle \hat{N} \rangle = N$ gelten, mit dem Teilchenzahloperator \hat{N} und der Teilchenzahl N . a_{ks}^+ und a_{ks} sind Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Fermionen mit den Vertauschungsrelationen (Antikommutatoren)

$$\{a_{ks}, a_{k's'}^+\} = \delta_{kk'} \delta_{ss'} \quad (4)$$

alle übrigen Antikommutatoren verschwinden.

Durch die BOGOLJUBOV-Transformation^{11, 12}

$$a_{ks} = u_{ks} \alpha_{ks} + v_{ks} \alpha_{-k-s}^+ \quad (5)$$

mit reellen Koeffizienten u_k und v_{ks} werden neue Quasiteilchenoperatoren α_{ks} und α_{ks}^+ eingeführt; für $u_k^2 + v_k^2 = 1$ genügen sie den Vertauschungsrelationen Gl. (4) (daneben hat man $u_{-k} = u_k$, $v_{k+} = -v_{k-} = v_k$ und $v_{-k} = v_k$).

Führt man in Gl. (1) die nach Gl. (5) gebildeten Quasiteilchen-Operatoren ein und ordnet unter Benutzung der Invarianzeigenschaften zu Normalprodukten um, so entsteht

$$H = U_0 + \sum_{ks} E_k \alpha_{ks}^+ \alpha_{ks} + H_{\text{int}} \quad (6)$$

mit

$$U_0 = \sum_k [(\varepsilon_k - \lambda + \xi_k) v_k^2 - \Delta_k u_k v_k] \quad (7a)$$

und der Quasiteilchen-Energie

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2} > 0; \quad (7b)$$

dabei sind die Größen

$$\xi_k = \varepsilon_k - \lambda + \frac{1}{\Omega} \sum_{k'} [2 \langle \mathbf{k} \mathbf{k}' | J | \mathbf{k}' \mathbf{k} \rangle - \langle \mathbf{k} \mathbf{k}' | J | \mathbf{k} \mathbf{k}' \rangle] v_{k'}^2 \quad (8a)$$

und

$$\Delta_k = -\frac{1}{\Omega} \sum_{k'} \langle \mathbf{k}, -\mathbf{k} | J | -\mathbf{k}', \mathbf{k}' \rangle u_{k'} v_{k'} \quad (8b)$$

eingeführt worden [die Spinsummation nach Gl. (2a) ist in Gln. (6) bis (8) bereits ausgeführt]. Für Δ_k gilt die nichtlineare Integralgleichung

$$\Delta_k = -\frac{1}{2\Omega} \sum_{k'} \langle \mathbf{k}, -\mathbf{k} | J | -\mathbf{k}', \mathbf{k}' \rangle \frac{\Delta_{k'}}{E_{k'}}, \quad (9)$$

die stets die triviale Lösung $\Delta_k \equiv 0$ besitzt. Für $\Delta_k \neq 0$ nennt man das System „supraleitend“. Die Koeffizienten u_k^2 und v_k^2 lauten, ausgedrückt durch ξ_k und E_k ,

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right); \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right). \quad (10)$$

Im folgenden wird von einer Abhängigkeit der Größen ξ_k , E_k und Δ_k von der Richtung des Vektors \mathbf{k} abgesehen¹⁵.

Die ersten beiden Terme in Gl. (6) bilden den neuen ungestörten HAMILTON-Operator H_0' , der die Form eines Operators freier Teilchen mit der Einteilchenenergie E_k besitzt. E_k verläuft qualitativ mit k wie in Abb. 1 dargestellt; es ist stets positiv und besitzt ein Minimum der Größe $\Delta > 0$, das für schwaches Potential bei $k \approx k_f$ (FERMI-Impuls) liegt. Die Koeffizienten u_k^2 und v_k^2 haben für schwaches Potential die Form von abgerundeten Treppenfunktionen (Abb. 2). Ohne Wechselwirkung haben E_k , u_k^2 und v_k^2 die in Abb. 1 und 2 gestrichelt eingezeichnete Form und $\lambda = \varepsilon_f = k_f^2/2m$. Der Grundzustand $|0\rangle$ von H_0' ist das Vakuum der Quasiteilchen ($\alpha_{ks}|0\rangle = 0$ für alle \mathbf{k} und s) und hat nach Gl. (6)

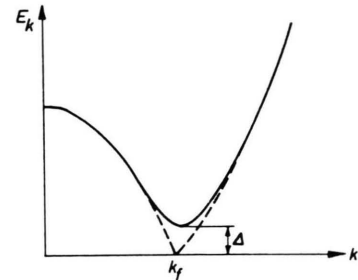


Abb. 1. Quasiteilchenenergie E (qualitativ); gestrichelt: Verlauf ohne Potential (Parabelstücke).

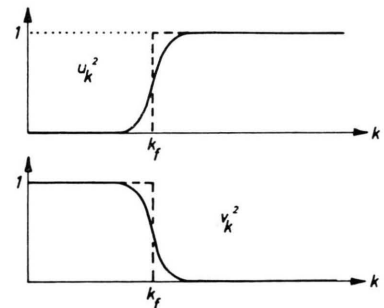


Abb. 2. Qualitativer Verlauf der Koeffizienten u_k^2 und v_k^2 für schwaches Potential; gestrichelt: Verlauf ohne Potential.

¹⁵ Vgl. hierzu V. M. GALITSKY in *Physica* **26**, Suppl., 143, 1960.

die Energie U_0 ; er ist also nicht wie bei H_0 der N -Teilchen-Zustand der gefüllten FERMI-Kugel. Angeregte Zustände von H_0' (die Zwischenzustände der unten folgenden Störungsrechnung) entstehen durch Anwendung einer (zur Erhaltung der Zahl der wirklichen Teilchen stets geraden) Anzahl von Quasiteilchen-Erzeugungsoperatoren α^+ auf $|0\rangle$.

Der Rest H_{int} in Gl. (6) enthält Normalprodukte aus vier Quasiteilchenoperatoren; dabei treten nicht nur Terme der Form $\alpha^+\alpha^+\alpha\alpha$ wie in der analogen Wechselwirkung V in Gl. (1) auf, sondern auch alle anderen Kombinationen, z. B. $\alpha\alpha\alpha\alpha$ oder $\alpha^+\alpha^+\alpha\alpha$ usw. H_{int} ist also komplizierter gebaut als die ursprüngliche Wechselwirkung V' , die genaue Form ist bei T (Gln. 12 bis 17) angegeben und soll hier nicht wiederholt werden¹⁶. Auch für Einzelheiten zu den folgenden Gln. (12) bis (14) vgl. T.

Die Energie U des Grundzustandes von $H = H_0' + H_{\text{int}}$ ist nach der SCHRÖDINGERSchen Störungsrechnung gegeben durch

$$U - U_0 = \langle 0 | H_{\text{int}} + H_{\text{int}} \frac{1}{U_0 - H_0'} H_{\text{int}} + \dots | 0 \rangle. \quad (11)$$

Das erste Glied dieser Reihe verschwindet, da der Erwartungswert aller Vierer-Normalprodukte ver-

schwindet. Von der 3. Ordnung in H_{int} ab treten noch kompliziertere als die in Gl. (11) angedeuteten Glieder auf; sie werden aber für die τ -Matrix nicht benötigt. Man kann nach T die einzelnen Terme der Störungsreihe (11) durch die üblichen Graphen (nach GOLDSTONE⁶ oder HUGENHOLTZ⁷) darstellen;

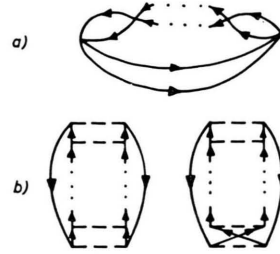


Abb. 3. Leitergraphen: (a) HUGENHOLTZ-Schreibweise; (b) GOLDSTONE-Schreibweise [der Graph (a) faßt die Graphen (b) zusammen].

zusätzlich zu den dortigen Übersetzungsvorschriften ist für Teilchenlinien ein Faktor u_k^2 , für Lochlinien ein Faktor v_k^2 einzufügen. Summiert man in Gl. (11) in allen Ordnungen nur über „Leitergraphen“ (Abb. 3) analog wie bei Gewinnung der t -Matrix⁶, so kann man ihren Beitrag zu (11) als

$$(U - U_0)_{\text{LG}} = - \frac{1}{2\Omega^2} \sum_{121'2'} \frac{[\langle 12 | J | 2'1' \rangle - \langle 12 | J | 1'2' \rangle] \cdot \langle 1'2' | \tau | 21 \rangle u_1^2 u_2^2 v_1^2 v_2^2}{E_1' + E_2' + E_1 + E_2} \quad (12)$$

($1 \equiv |k_1 s_1\rangle$ etc.)

zusammenfassen; die etwas umständliche Rechnung sei zur Platzersparnis fortgelassen, vgl. z. B. GOLDSTONE⁶. In Gl. (12) ist das *Matrizelement der τ -Matrix* durch

$$\langle 1'2' | \tau | 21 \rangle = \langle 1'2' | J | 21 \rangle - \frac{1}{\Omega} \sum_{1''2''} \frac{\langle 1'2' | J | 2''1'' \rangle \cdot \langle 1''2'' | \tau | 21 \rangle u_1^2 u_2^2}{E_1'' + E_2'' + E_1 + E_2} \quad (13)$$

definiert; durch Iteration von Gl. (13) erhält man den darin aufsummierten Anteil der Störungsreihe explizit. Mit Gl. (2 a) kann man schreiben

$$\langle \mathbf{k}_1' s_1', \mathbf{k}_2' s_2' | \tau | \mathbf{k}_2 s_2, \mathbf{k}_1 s_1 \rangle = \langle \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2' | \tau | \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \rangle \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'},$$

da die Impuls- und Spinabhängigkeit in $\langle \tau \rangle$ dieselbe wie in $\langle J \rangle$ ist, und erhält aus Gl. (13)

$$\langle \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2' | \tau | \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \rangle = \langle \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2' | J | \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \rangle - \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}_1'' \mathbf{k}_2''} \frac{\langle \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2' | J | \mathbf{k}_2'' \mathbf{k}_1'' \rangle \langle \mathbf{k}_1'' \mathbf{k}_2'' | \tau | \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \rangle u_{k_1}^2 u_{k_2}^2}{E_{k_1''} + E_{k_2''} + E_{k_1} + E_{k_2}}. \quad (14)$$

Gl. (14) ist völlig analog gebaut wie die entsprechende Gleichung für das Matrizelement der t -Matrix [Gl. (5.3) in ⁶ für $\delta E = 0$]. Der dort auftretenden Summationsbeschränkung (sie würde hier $k_1'' > k_f$, $k_2'' > k_f$ lauten) entsprechen hier die als Abschneidefaktoren wirkenden u_1^2 und u_2^2 (vgl. Abb. 2). Der wesentliche Unterschied besteht im Energienenner, der dort zwar bei endlichem Normierungsvolumen Ω nicht Null, für großes Ω aber doch sehr klein werden kann. Hier dagegen ist er wegen $E_k \geq \Delta > 0$ stets größer als 4Δ .

¹⁶ Die Matrizelemente bei T sind antisymmetrisiert, es gilt für sie $\langle a b | V | c d \rangle = \langle a b | J | c d \rangle - \langle a b | J | d c \rangle$.

Führt man in Gl. (14) Gesamt- und Relativimpulse nach Gl. (3) ein und benutzt Gl. (2b), so kann man über \mathbf{K}' summieren und erhält mit

$$\langle \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 | \tau | \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \rangle = \langle \mathbf{K}' \mathbf{k}' | \tau | \mathbf{K}, \mathbf{k} \rangle = f_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}') \delta_{\mathbf{K}\mathbf{K}'}$$

bei Ersetzen der verbleibenden Summation über \mathbf{k}'' durch Integration

$$f_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}') = g_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}') - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}'' G_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') f_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}'') \quad (15)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | J | \mathbf{k} \rangle &\equiv g_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}'); \quad G_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \equiv \frac{\langle \mathbf{k}' | J | \mathbf{k}'' \rangle u^2(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}'') u^2(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k}')}{E(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}'') + E(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k}') + \beta(\mathbf{K}, \mathbf{k})}, \\ \beta(\mathbf{K}, \mathbf{k}) &\equiv E_{k_1} + E_{k_2} = E(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}) + E(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k}) > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Gl. (15) ist eine inhomogene FREDHOLMSche Integralgleichung 2. Art für die noch von \mathbf{K}, \mathbf{k} als Parametern abhängende Funktion $f_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}')$ mit der Inhomogenität $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}')$ und dem Kern $G_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'')$. Gefragt ist, ob Gl. (15) in Abhängigkeit von \mathbf{K} und \mathbf{k} stets lösbar ist. Gl. (15) ist dann unlösbar¹⁷, wenn die zugehörige homogene Integralgleichung

$$\bar{f}_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}') = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}'' G_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \bar{f}_{\mathbf{K}\mathbf{k}}(\mathbf{k}'') \quad (17)$$

lösbar ist durch $\bar{f} \equiv 0$ ¹⁸.

Die Untersuchung der Gln. (9) und (17) vereinfacht sich erheblich, wenn man ein separierbares Potential verwendet. Man setzt

$$\langle \mathbf{k}' | J | \mathbf{k}'' \rangle = \gamma g(k') g(k'') \quad (18)$$

mit einer nur vom Betrage des Relativimpulses abhängigen Funktion $g(k)$ und einer Kopplungskonstanten γ ($\gamma < 0$ für anziehendes, $\gamma > 0$ für abstoßendes Potential); für dimensionslos gewähltes $g(k)$ hat γ die Dimension einer Energie. $g(k)$ sei beschränkt für alle k und hinreichend glatt; zur genaueren Formulierung dieser Forderung s. Abschn. 2.

Für separierbares Potential nach Gl. (18) folgt aus Gl. (9)

$$A_{\mathbf{k}} = C g(k), \quad (19)$$

wobei für $C \neq 0$ („Supraleitung“) die Integralgleichung

$$- \frac{\gamma}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{g^2(k)}{\sqrt{\xi k^2 + C^2 g^2(k)}} = 1 \quad (20)$$

¹⁷ R. COURANT u. D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics I, § III. 2. Interscience Publishers, Inc., New York 1953.

¹⁸ Eine Untersuchung der zur Unlösbarkeit notwendigen zweiten Bedingung

$$\int g_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}') p(\mathbf{k}') d^3\mathbf{k}' \neq 0$$

erfüllt sein muß; sie ist nur für $\gamma > 0$ (Anziehung) lösbar.

Gl. (17) vereinfacht sich entsprechend. Man erhält als Bedingung für die Lösbarkeit

$$\bar{A}(\mathbf{K}, \beta) = 1 \quad (21)$$

mit

$$\bar{A}(\mathbf{K}, \beta) = - \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}' \frac{g^2(k') u^2(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}') u^2(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k}')}{E(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}') + E(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k}') + \beta} \quad (22)$$

Die Untersuchung der Funktion $\bar{A}(\mathbf{K}, \beta)$ (die übrigens von der Richtung des Vektors \mathbf{K} nicht abhängt) wird im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen stehen. Es sei daran erinnert, daß die Lösbarkeit von Gl. (21) die Unlösbarkeit von Gl. (15), d. h. Singularität der τ -Matrix, bedeutet; Gl. (21) ist höchstens für anziehende Wechselwirkung ($\gamma < 0$) lösbar. Eine zu Gl. (21) analoge Beziehung für die Singularität der t -Matrix steht z. B. bei HAYES⁵.

Für $K=0$ faßt man nach T in Gl. (22) $E(\mathbf{k}) + E(-\mathbf{k}) = 2E(k)$ und $u^2(\mathbf{k}) u^2(-\mathbf{k}) = u^4(k)$ zusammen; der Vergleich von Gl. (21) für $K=0$ und Gl. (20) zeigt dann, daß

$$\begin{aligned} \bar{A}(0, \beta) &= \frac{-\gamma}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{g^2(k) u^4(k)}{E_k + \frac{1}{2}\beta} \\ &< \frac{-\gamma}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{g^2(k)}{E_k} = 1 \end{aligned} \quad (23)$$

gilt wegen $\beta > 0$ und $u^2 < 1$ (s. Abb. 2); also ist die τ -Matrix für $K=0$ nicht singular im Gegensatz zur t -Matrix.

für die Lösung p der transponierten homogenen Gleichung erübrigt sich hier, da im später behandelten Fall schon Gl. (17) unlösbar ist. — Da der Kern G nur von \mathbf{K} und β abhängt, nimmt man diese statt \mathbf{K} und \mathbf{k} als Parameter für f .

Zur Untersuchung von Gl. (21) für $K \neq 0$ benutzt man zunächst

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \bar{A}(\mathbf{K}, \beta) < 0, \quad (24)$$

was durch Differentiation des Integranden nach β sofort zu sehen ist. Ferner verschwindet $\bar{A}(\mathbf{K}, \infty)$. Für $K \neq 0$ ist also Gl. (21) für alle diejenigen K erfüllbar, für die

$$\bar{A}(\mathbf{K}, 0) \equiv A(\mathbf{K}) \geq 1 \quad (25)$$

gilt; denn dann gibt es wegen Gl. (24) immer ein $\beta > 0$, so daß $\bar{A}(\mathbf{K}, \beta) = 1$ erfüllt ist.

Die K -Abhängigkeit der Funktion $A(\mathbf{K})$ ist aus Gl. (22) nicht ohne weiteres zu erkennen. Im folgenden wird in einer Näherung für schwaches Potential gezeigt, daß $A(\mathbf{K})$ monoton mit K fällt. Dazu wird $A'(\mathbf{K}) = dA(\mathbf{K})/dK$ mit einer für $\gamma \rightarrow 0$ daraus entstehenden Grenzfunktion $A_0'(\mathbf{K})$ verglichen, die für alle K negativ ist [sie ist die Ableitung der durch $\gamma \rightarrow 0$ aus $A(\mathbf{K})$ ^{18a} gebildeten Grenzfunktion $A_0(\mathbf{K})$]. Für kleine γ weicht dann $A'(\mathbf{K})$, mit Ausnahme des Bereiches sehr kleiner K und einer kleinen Umgebung von $K = 2k_f$, beliebig wenig von $A_0'(\mathbf{K})$ ab und ist somit wie dieses negativ. Eine direkte Diskussion der beiden Ausnahmeregionen zeigt, daß auch dort $A'(\mathbf{K}) < 0$; somit fällt $A(\mathbf{K})$ monoton mit K für alle K .

2. Näherung für $A'(\mathbf{K})$

2.1. Näherung für ξ_k .

Umformulierung auf dimensionslose Variable

Nach Gln. (22) und (25) ist (mit $-\gamma = \mu > 0$)

$$A(\mathbf{K}) = \frac{\mu}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{g^2(k) u^2(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}) u^2(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k})}{E(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}) + E(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k})}. \quad (26)$$

Hierin wird zuerst

$$\xi_k \approx \varepsilon_k - \varepsilon_f \quad (27)$$

genähert; das bedeutet nach Gl. (8a) Ersetzen von λ durch seinen Wert ε_f für fehlende Kopplung und Vernachlässigen des von der Wechselwirkung abhängigen Terms. Beides ist für schwache Kopplung und geringe Dichte gerechtfertigt (dann ist $v^2 \approx 0$ für $k > k_f$, und es ist $Q \sim k_f^3$).

Mit der Näherung (27) und den dimensionslosen Variablen

$$\mathbf{y} = \mathbf{k}/k_f \quad \text{und} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{K}/k_f \quad (28)$$

sowie der Abkürzung $x = \cos(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ wird dann

$$\xi_k = \varepsilon_f(y^2 - 1) = \varepsilon_f \xi(y) \quad (-1 \leq \xi < \infty \text{ wegen } y \geq 0) \quad (29)$$

und

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + C^2} g^2(k) = \varepsilon_f \sqrt{\xi^2(y) + D_0^2} g^2(y) \equiv \varepsilon_f E(y), \quad (30)$$

$$\text{wobei} \quad D_0 = C/\varepsilon_f \ll 1 \quad (31)$$

angenommen ist; diese Bedingung drückt die Schwäche der Kopplung aus¹⁹. Für die in $A(\mathbf{K})$ auftretenden Größen erhält man

$$\xi(\frac{1}{2}\mathbf{K} \pm \mathbf{k}) = \varepsilon_f \xi_{\pm}(Y, y, x) \equiv \varepsilon_f \left(\frac{Y^2}{4} \pm Y y x + y^2 - 1 \right) \quad (32)$$

und

$$E(\frac{1}{2}\mathbf{K} \pm \mathbf{k}) = \varepsilon_f E_{\pm}(Y, y, x) \equiv \varepsilon_f \sqrt{\xi_{\pm}^2(Y, y, x) + D_0^2} g_{\pm}^2(Y, y, x) \quad (33)$$

wobei

$$g_{\pm}(Y, y, x) = g(|\frac{1}{2}\mathbf{K} \pm \mathbf{k}|) = g(\sqrt{1 + \xi_{\pm}}). \quad (34)$$

Aus ξ_{\pm} und E_{\pm} entsteht nach Gl. (10) $u_{\pm}^2(Y, y, x)$. Mit diesen Formeln erhält man aus Gl. (26) (in Polarkoordinaten mit \mathbf{Y} als Polarachse)

$$A(\mathbf{K}) = \frac{\mu}{(2\pi)^2} \frac{k_f^3}{\varepsilon_f} Q(Y) \quad (35)$$

$$\text{mit} \quad Q(Y) = \int_0^{\infty} dy \int_{-1}^1 dx g^2(y) y^2 f(Y, y, x) \quad (36)$$

$$\text{und} \quad f(Y, y, x) = \frac{u_+^2(Y, y, x) u_-^2(Y, y, x)}{E_+(Y, y, x) + E_-(Y, y, x)}. \quad (37)$$

$f(Y, y, x)$ hängt von Y, y und x explizit nur in der Form ξ_{\pm} ab und ist symmetrisch in ξ_+ und ξ_- .

Es ist zweckmäßig, nicht die Funktion $Q(Y)$ selbst, sondern ihre Ableitung $Q'(Y) = dQ(Y)/dY$ zu untersuchen. Mit den Gln. (32) bis (34), (36) und (37) ist

$$Q'(Y) = \frac{dQ(Y)}{dY} = \int_0^{\infty} dy \int_{-1}^1 dx g^2(y) y^2 f'(Y, y, x) \quad (38)$$

$$\text{mit} \quad f'(Y, y, x) = \frac{\partial f(Y, y, x)}{\partial Y} = \frac{u_+^2(u_+^2)' + u_-^2(u_-^2)'}{E_+ + E_-} - \frac{u_+^2 \cdot u_-^2}{(E_+ + E_-)^2} (E_+' + E_-'), \quad (39a)$$

$$(u_{\pm}^2)' = \frac{\partial}{\partial Y} u_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \frac{E_{\pm} \xi_{\pm}' - \xi_{\pm} E_{\pm}'}{E_{\pm}}, \quad (39b)$$

^{18a} Genauer: aus $A(\mathbf{K})/\gamma$, s. Gln. (35), (36) und (41).

¹⁹ Nach Gl. (20) ist $C=0$ für $\mu=0$; es gilt $C \sim \exp(-\text{const}/\mu)$.

$$E'_{\pm} = \frac{\partial}{\partial Y} E_{\pm} = \frac{\xi_{\pm} \xi'_{\pm} + D_0^2 g_{\pm} g'_{\pm}}{E_{\pm}}, \quad (39c)$$

$$g'_{\pm} = \frac{\partial}{\partial Y} g_{\pm} = \frac{\dot{g}_{\pm}}{2\sqrt{1+\xi_{\pm}}} \xi'_{\pm}; \quad \dot{g}_{\pm} = \left. \frac{dg(y)}{dy} \right|_{y=\sqrt{1+\xi_{\pm}}} \quad (39d)$$

und schließlich mit Gl. (32)

$$\xi'_{\pm} = \frac{\partial}{\partial Y} \xi_{\pm} = \frac{Y}{2} \pm yx = \frac{Y}{2} \pm \frac{1}{2Y} (\xi_{+} - \xi_{-}); \quad (40)$$

die letzte Form entsteht, wenn man yx nach Gl. (32) durch ξ_{+} und ξ_{-} ausdrückt. Sie gestattet, das gesamte $f'(Y, y, x)$ als Funktion von ξ_{+} und ξ_{-} allein zu schreiben; das ist im folgenden wesentlich.

Neben $Q'(Y)$ wird wegen $D_0 \ll 1$ später noch die Funktion

$$Q_0'(Y) = \frac{dQ_0(Y)}{dY} = \int_0^{\infty} dy \int_{-1}^1 dx g^2(y) y^2 f_0'(Y, y, x);$$

$$f_0' = \frac{\partial}{\partial Y} f_0(Y, y, x) \quad (41)$$

betrachtet, die Ableitung der einfacher als $Q(Y)$ gebauten Grenzfunktion

$$Q_0(Y) = \lim_{D_0 \rightarrow 0} Q(Y) = \int_0^{\infty} dy \int_{-1}^1 dx g^2(y) y^2 f_0(Y, y, x) \quad (42)$$

$$\text{mit } f_0(Y, y, x) = \lim_{D_0 \rightarrow 0} f(Y, y, x) = \frac{\varepsilon(\xi_{+}) \cdot \varepsilon(\xi_{-})}{\xi_{+} + \xi_{-}} \quad (43)$$

(s. Anm. ²⁰).

In Abschn. 2.5 wird $Q_0'(Y) < 0$ für alle Y gezeigt, und in Abschn. 3 wird $Q'(Y)$ durch Vergleich mit seiner Grenzfunktion $Q_0'(Y)$ diskutiert²¹. Zunächst wird aber $Q'(Y)$ weiter untersucht.

2.2 Diskussion von $Q'(Y)$ durch Näherung: Programm

Das Vorzeichen von $Q'(Y)$ ist aus Gln. (38) und (39) nicht ohne weiteres abzulesen; eine einfache Aussage wäre nur möglich, wenn f' ein definiertes Vorzeichen besäße, und das ist aus Gl. (39a) mindestens nicht evident. Unmittelbar ergibt sich nur

$$Q'(0) = 0 \quad (44)$$

aus der Invarianz von $f(Y, y, x)$ gegen die Transformation $Y \rightarrow -Y$; für weitere Aussagen sind wegen des komplizierten Baus von Gl. (39) Näherungen erforderlich.

Die im folgenden zu verwendende Näherung für $Q'(Y)$ geht davon aus, daß für $D_0 \ll 1$ und beschränktes $g(y)$ die Quasiteilchenenergie $E(y)$ [Gl. (30)] außer in einer engen Umgebung von $\xi = 0$ (etwa $-a \leq \xi \leq a$ mit $0 < a \ll 1$) durch $E = |\xi|$ ersetzt werden kann; in Abb. 1 wäre dann E überall außer in der Umgebung des Minimums durch die gestrichelte Grenzkurve zu ersetzen. Für den Faktor u^2 folgt dann nach Gl. (10) (s. Abb. 2) eine qualitative Einteilung in drei Bereiche der Variablen ξ

1. $u^2 \approx 0$ für $-1 \leq \xi < a$, da dort $\xi \approx -E$,
2. u^2 steigt rasch von 0 auf 1 in $-a \leq \xi \leq a$,
3. $u^2 \approx 1$ in $a < \xi$, da dort $\xi \approx E$.

In Abschn. 2.3 wird diese Näherung für E und u^2 [mit $D \equiv D_0 g(1)$ als Parameter] quantitativ formuliert.

Nun hängt $f'(Y, y, x)$ nur von den Variablen ξ_{+} und ξ_{-} ab. Daher werden zunächst in Gl. (38) statt y und x als neue Variable $\xi_{+} \equiv s$ und $\xi_{-} \equiv t$ eingeführt; s und t sind die natürlichen Variablen des Problems. Es ist zweckmäßig, erst $Q'(Y)$ wie in Gl. (38) zu bilden und dann die Variablen zu transformieren; das Ergebnis bei umgekehrter Reihenfolge der Operationen ist zwar das gleiche, aber für die folgende Behandlung ungeeignet. Nach der Substitution entsteht (s. Abschn. 2.4)

$$Q'(Y) = \frac{1}{4Y} \int \int_{G(s,t)} ds dt g^2(s, t, Y) f'(s, t, Y)$$

$$\text{mit } g^2(s, t, Y) = g^2(y) = g^2(\sqrt{(s+t)/2 - c}) \quad (45)$$

mit dem Integrationsgebiet $G(s, t)$ in Abb. 5; dasselbe gilt mit f_0' statt f' für $Q_0'(Y)$.

Die gesuchte Näherung entsteht durch die folgenden Schritte:

1. Das zweidimensionale Integrationsgebiet $G(s, t)$ für $Q'(Y)$ wird in Teilgebiete unterteilt, je nachdem, wie s und t in einem der drei genannten ξ -Intervalle liegen. Es treten 4 Typen von Teilgebieten auf (Abb. 6)

$$G_I: \quad s \geq a, \quad t \geq a,$$

$$\text{dort ist } u_s^2 \approx 1 \text{ und } u_t^2 \approx 1 \quad (46a)$$

$$(u_s \equiv u_{+}, \quad u_t \equiv u_{-})$$

²⁰ Es ist (Fortlassen von \pm) benutzt

$$\lim_{D_0 \rightarrow 0} E = |\xi| \text{ und } \lim_{D_0 \rightarrow 0} u^2 = \lim_{D_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2}(1 + \xi/E) = \varepsilon(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < 0 \\ 1 & \xi > 0 \end{cases};$$

im Nenner kann man dann ξ statt $|\xi|$ schreiben.

²¹ Der Zusammenhang zwischen Q' , Q_0 , Q_0' und den in Abschnitt 1 erwähnten Funktionen A' , A_0 und A_0' ist nach Gl. (35) evident.

G_{II} : $|s| \leq a, |t| \leq a$,
dort steigen u_s^2 und u_t^2 von 0 auf 1;
(46 b)

G_{III} : a) $s \geq a, |t| \leq a$; b) $t \geq a, |s| \leq a$,
einer der beiden Faktoren u^2 ist ≈ 1 , (46 c)
der andere steigt von 0 auf 1.

G_{IV} : a) $s \leq -a, t \leq -a$ b) $s \leq -a, |t| \leq a$
c) $|s| \leq a, t \leq -a$ d) $s \leq -a, t \geq a$
e) $s \geq a, t \leq -a$, (46 d)
mindestens einer der beiden Faktoren u^2
ist klein.

2. Das Integral $Q'(Y)$ wird als Summe von Teilintegralen über die einzelnen Gebiete geschrieben:

$$Q'(Y) = Q_I'(Y) + \dots + Q_{IV}'(Y);$$

in jedem der Gebiete werden Näherungsausdrücke für das im Integranden von Gl. (45) auftretende $f'(s, t, Y)$ gebildet, indem man in Gl. (39) für E_s, E_t usw. die für das betrachtete Teilgebiet gültige Entwicklung aus Abschn. 2.3 einsetzt und nach Potenzen von D ordnet. Benutzt wird im folgenden nur das mit $h_n(s, t, Y)$ bezeichnete erste und größte Glied der Entwicklung (es ist entweder mit den entsprechenden Anteilen $f'_{0,n} [= f'_0$ in G_n] identisch oder geht bei $D \rightarrow 0$ in diese über, s. Anhang 1).

3. Bei Integration der Hauptterme $h_n(s, t, Y)$ über das jeweilige Teilgebiet G_n entstehen Näherungsausdrücke

$$H_n(Y) = \frac{1}{4Y} \int \int_{G_n(s,t)} g^2(s, t, Y) h_n(s, t, Y) ds dt \quad (47)$$

für $Q_n'(Y)$, und die gesamte Näherungsformel für $Q'(Y)$ lautet

$$Q'(Y) \approx H_I(Y) + \dots + H_{IV}(Y). \quad (48)$$

In Abschn. 3 wird $Q'(Y)$ mit Hilfe dieser Näherungsformel diskutiert; im Rest des Abschnitts 2 werden die einzelnen Schritte des eben skizzierten Programms ausgeführt.

2.3. Näherungsformeln für die Quasiteilchenenergie E

1. Für $|\xi| \geq a$ wird E_{\pm} [Gl. (33)] entwickelt als

$$E = |\xi| \sqrt{1 + \frac{D_0^2 g^2}{\xi^2}} = |\xi| \left(1 + \frac{D^2 g^2}{2 g_1^2 \xi^2} + \dots \right) \quad (49)$$

[Abkürzungen: $g \equiv g(\sqrt{1+\xi})$, $g_1 \equiv g(1)$ und $D \equiv D_0 g(1) \ll 1$].

Dann ist

$$u^2 = \frac{D^2 g^2}{4 g_1^2 \xi^2} + \dots \text{ für } \xi \leq a$$

und

$$u^2 = 1 - \frac{D^2 g^2}{4 g_1^2 \xi^2} + \dots \text{ für } \xi \geq a. \quad (50)$$

a soll nun so gewählt werden, daß

1. u^2 für $\xi \leq -a$ höchstens von der Größenordnung $D \ll 1$ ist; damit ist die Kleinheit von u^2 quantitativ erfaßt.
2. $a \ll 1$.

Beide Forderungen widersprechen sich in gewissem Maße, denn nach Gl. (50) wird u^2 für $\xi \leq -a$ um so größer, je kleiner ξ werden kann. Falls aber $g(y)$ beschränkt ist derart, daß

$$g^2(y)/4 g_1^2 \leq M \quad (51)$$

mit nicht zu großem M , lassen sich beide Forderungen durch die Wahl

$$a = \sqrt{D} \quad (52)$$

vereinigen. Denn dann ist in u^2 für $\xi \leq -a$ der größte Term $< MD$, aber auch mit $D \ll 1$ noch $a \ll 1$. Weiterhin darf dann mit Gl. (52) die Reihenentwicklung für E , Gl. (49), nach dem 1. Glied abgebrochen werden, da der Betrag des 2. Gliedes in der Klammer $< 2MD \ll 1$. Die ersten Glieder in den Gln. (49) und (50) sind die gesuchten Näherungsformeln für $|\xi| \geq a$.

2. Für $|\xi| \leq a$ gilt wegen $|\xi| \ll 1$

$$D_0^2 g^2(\sqrt{1+\xi}) = D^2 \left(1 + \frac{\dot{g}_1}{g_1} \xi + \dots \right); \quad \dot{g}_1 \equiv \frac{dg(y)}{dy} \Big|_{y=1}$$

und damit wird

$$E = \sqrt{\xi^2 + D^2} \left(1 + D^2 \frac{\dot{g}_1}{2 g_1} \frac{\xi}{\xi^2 + D^2} + \dots \right) \quad (53)$$

$$\text{und daneben } u^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + D^2}} \right) + \dots \quad (54)$$

$$\text{Falls } |\dot{g}_1/2 g_1| < N \quad (55)$$

mit nicht zu großem N , kann auch die Entwicklung (53) nach dem ersten Gliede abgebrochen werden. Somit sind Gl. (53) (1. Glied) und Gl. (54) die Näherungsformeln für $|\xi| \leq a$. Die Wurzel $\sqrt{\xi^2 + D^2}$ in Gl. (53) bleibt besser unentwickelt, da in $0 < |\xi| < \sqrt{D}$ teils $|\xi| > D$, teils $|\xi| < D$ ist, und auch beim Ordnen nach Potenzen von D in der Näherungsformel für $f'(s, t, Y)$ wird das D in dieser Wurzel nicht berücksichtigt.

Beide Näherungsausdrücke, sowohl Gln. (49) bzw. (50) wie (53) bzw. (54), sind wegen der Wahl $a = \sqrt{D}$ gute Näherungsformeln für den gesamten Bereich $|\xi| \geq a$ und $|\xi| \leq a$.

2.4. Variabelntransformation und Gebietseinteilung

Die neuen Variablen für $Q'(Y)$, Gln. (38) und (39), sind

$$\left. \begin{aligned} \xi_+ &\equiv s + c + Y y x + y^2 \\ \xi_- &\equiv t + c - Y y x + y^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad c \equiv \frac{Y^2}{4} - 1 \quad (56)$$

oder umgekehrt

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{-c + (s+t)/2}, \\ x &= (s-t)/(2Y\sqrt{-c + (s+t)/2}). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Die Funktionaldeterminante lautet

$$\partial(x, y)/\partial(s, t) = 1/4 Y y^2, \quad (58)$$

und das Integrationsgebiet von Gl. (38), Abb. 4, transformiert sich in das Innere einer von Y als Parameter abhängigen Parabel mit dem Scheitel in $s=t=c$ und der Geraden $s=t$ als Achse. Abb. 5

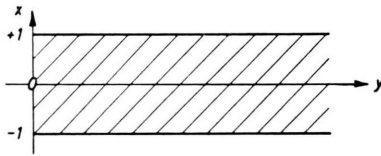


Abb. 4. Integrationsgebiet von $Q'(Y)$ in den Variablen y und x .

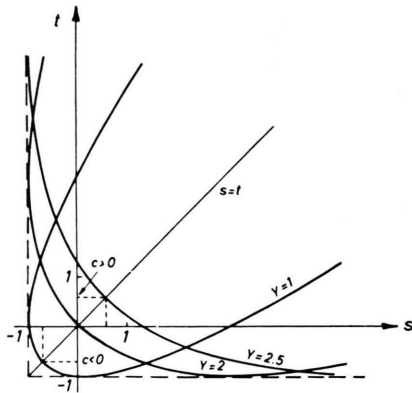


Abb. 5. Transformiertes Integrationsgebiet $G(s, t, Y)$ für $Y=1, 2$ und $2,5$. G ist das Innere der gezeichneten Parabeln.

zeigt das transformierte Integrationsgebiet $G(s, t, Y)$ für verschiedene Y ; der untere Parabelast ist das Bild der Geraden $x=1$ aus Abb. 4, der obere das der Geraden $x=-1$. Die Strecke $-1 \leq x \leq 1$ bei $y=0$ wird auf den Scheitelpunkt der Parabel abgebildet, die y -Achse auf die Gerade $s=t$, um die $G(s, t, Y)$ symmetrisch bleibt. Für $Y \rightarrow 0$ zieht sich die Parabel auf die Gerade $s=t$ zusammen; der Faktor $1/Y$ in Gl. (58) kompensiert dieses Ver-

schwinden des Integrationsgebietes, das in den Variablen x, y natürlich nicht auftritt. Für $Y > 2$ enthält G den Punkt $s=t=0$ nicht mehr. Tangenten an die Parabel sind stets die Geraden $s=-1, t=-1$. In den Variablen s und t lautet die Gleichung der Parabel

$$t = t_1(s) = s + Y^2 - 2Y\sqrt{s+1} \quad (59a)$$

für den in Abb. 5 unteren Teil bis zur Unendlichkeitsstelle links an der Geraden $s=-1$, und

$$t = t_2(s) = s + Y^2 + 2Y\sqrt{s+1} \quad (59b)$$

für den Rest, ebenso bei Vertauschen von t und s für s in Abhängigkeit von t .

Abb. 6 zeigt die Gebietseinteilung von $G(s, t, Y)$ durch die Grenzgeraden $s = \pm a, t = \pm a$. Die Einzelheiten der (von a und Y abhängigen) Gebietsgren-

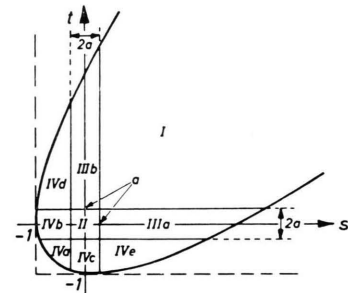


Abb. 6. Einteilung von G durch die Geraden $s = \pm a, t = \pm a$ in 4 Typen von Teilgebieten.

zen seien hier zur Platzersparnis nicht angegeben; man erhält sie aus Gl. (59) und den Abb. 5 und 6. Wichtig ist, daß es nicht für alle Y alle Teilgebiete G_{ni} gibt. So existiert z. B. G_{II} nur für $0 < Y < 2\sqrt{1+a}$ (und hat für $a \approx \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} < Y < 2\sqrt{1-a}$ die einfache Y -unabhängige Quadratform $-a \leq s \leq a, -a \leq t \leq a$), und das Gebiet G_{IV} besteht für $Y > \sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}$ nur noch aus G_{IVd} und G_{IVe} .

Für die Untersuchung von $Q'_0(Y)$ (Abschn. 2.5) ist die durch Drehung des $s-t$ -Systems um 45° entstehende Substitution

$$p = c + Y^2 = (s+t)/2, \quad q = Y y x = (s-t)/2 \quad (60)$$

mit der Umkehrung

$$Y = \sqrt{p-c}, \quad x = q/Y\sqrt{p-c} \quad (61)$$

oder

$$s = p + q, \quad t = p - q$$

zweckmäßig. Das Integrationsgebiet ist dann das Innere einer nach rechts offenen Parabel mit dem Schei-

tel in $p=c$ und der p -Achse als Achse (Abb. 7), die Grenzen sind z. B.

$$c \leq p < \infty; \quad -Y\sqrt{p-c} \leq q \leq Y\sqrt{p-c}. \quad (62)$$

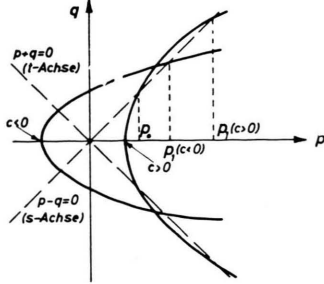


Abb. 7. Gebiet $G(p, q, Y)$ in den Variablen p und q , Gl. (60), (schematisch) für $Y < 2$ ($c < 0$) und $Y > 2$ ($c > 0$). In dem von den Diagonalen gebildeten Quadranten rechts, der die positive p -Achse enthält, ist $\varepsilon(p+q) \varepsilon(p-q) \neq 0$. Koordinaten der Schnittpunkte von Diagonale und Grenzparabel: $p_1 = (Y^2 + 2Y)/2$; $p_0 = (Y^2 - 2Y)/2$ (nur bei $c > 0$ benötigt).

2.5. Verhalten von $Q_0'(Y)$

In den Variablen p und q lautet Q_0 nach Gl. (42) und Gln. (60) bis (62)

$$Q_0(Y) = \frac{1}{2Y} \int_c^\infty dp \int_0^{Y\sqrt{p-c}} dq g^2(\sqrt{p-c}) \frac{\varepsilon(p+q) \varepsilon(p-q)}{p} \quad (63)$$

mit den Grenzen (62); da der Integrand eine in q gerade Funktion ist, genügt Integration über $0 < q < Y\sqrt{p-c}$ (obere Hälfte in Abb. 7). Wegen der Unabhängigkeit der Potentialfunktion in Gl. (63) von q wird erst die q -Integration ausgeführt. Für $Y < 2$ ($c < 0$) ist dabei zu beachten, daß in $G(p, q)$ bei $p=0$ eine Singularität des Integranden liegt; bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge divergiert das Integral über p bei $q=0$ (s. Abb. 7). Daher wird zunächst $|p| < \varepsilon$ von der Integration ausgeschlossen; dann ist die Reihenfolge der Integrationen sicher gleichgültig, und anschließend wird $\varepsilon=0$ gesetzt. Für $Y > 2$ ist wegen $p \neq 0$ in ganz $G(p, q)$ kein solcher Grenzprozeß nötig. Differenziert man das so erhaltene $Q_0(Y)$ nach Y , so entsteht für $Y < 2$

$$Q_0'(Y) = -\frac{1}{2Y^2} \int_0^{p_1} dp g^2(\sqrt{p-c}) + \frac{1}{4} g^2(1-Y^2/4) - \frac{Y}{4} \int_{p_1}^\infty dp \frac{\sqrt{p-c} g^2(\sqrt{p-c})}{p^2}, \quad (64)$$

und für $Y > 2$

$$Q_0'(Y) = -\frac{Y}{4} \int_c^{p_0} dp \frac{\sqrt{p-c} g^2(\sqrt{p-c})}{p^2} - \frac{1}{2Y^2} \int_{p_0}^{p_1} dp g^2(\sqrt{p-c}) - \frac{Y}{4} \int_{p_1}^\infty dp \frac{\sqrt{p-c} g^2(\sqrt{p-c})}{p^2} \quad (65)$$

mit p_0 und p_1 aus Abb. 7. Für $Y=2$ springt $Q_0'(Y)$ um $\frac{1}{4} g^2(0)$, denn in Gl. (65) verschwindet für $Y \rightarrow 2+0$ ($c \rightarrow 0^+$) das erste Integral, und die übrigen Integrale stimmen für $Y=2$ überein. [$Q_0(Y)$ dagegen ist stetig in $Y=2$.] Für hinreichend glatt verlaufendes $g(y)$ ist aber in Gl. (64)

$$-\frac{1}{2Y^2} \int_0^{p_1} dp g^2(\sqrt{p-c}) + \frac{1}{4} g^2(\sqrt{1-Y^2/4}) < 0$$

für $0 \leq Y \leq 2$, und damit ist nach Gln. (64) und (65)

$$Q_0'(Y) < 0 \text{ für alle } Y.$$

Für $Y \rightarrow 0$ erhält man aus Gl. (64)

$$\lim_{Y \rightarrow 0} Q_0'(Y) = -\infty^{22}. \quad (66)$$

2.6. Näherungsformeln für $f'(s, t, Y)$

Die Näherungsausdrücke $h_n(s, t, Y)$ erhält man mit den in Abschn. 2.3 angegebenen Formeln aus Gl. (39). Man kann alle Anteile von $f'(s, t, Y)$ durch E , ξ und ξ' ausdrücken und erhält in den einzelnen Teilgebieten G_n [Gl. (46)] nach einiger elementarer Rechnung

$$G_I: \quad h_I(s, t, Y) = -\frac{Y}{(s+t)^2}, \quad (67)$$

$$G_{II}: \quad h_{II}(s, t, Y) = \frac{Y}{8} \left[b_1(s, t) + \frac{1}{Y^2} b_2(s, t) \right] \quad (68)$$

$$\text{mit} \quad b_1(s, t) = \beta_s \frac{\partial}{\partial t} \frac{\beta_t}{W_s + W_t} + \beta_t \frac{\partial}{\partial s} \frac{\beta_s}{W_s + W_t}, \quad (69a)$$

$$b_2(s, t) = (s-t) \left[\beta_t \frac{\partial}{\partial s} \frac{\beta_s}{W_s + W_t} - \beta_s \frac{\partial}{\partial t} \frac{\beta_t}{W_s + W_t} \right], \quad (69b)$$

dabei sind als Abkürzungen $W_s = \sqrt{s^2 + D^2}$ und $\beta_s = 1 + (s/W_s)$ benutzt, ebenso für W_t und β_t ; die Glieder bei Y und bei $(s-t)/Y$ in ξ' [Gl. (40)] sind als b_1 bzw. b_2 zusammengefaßt. Man erkennt in Gl. (69) nach Ausführen der Differentiationen die Struktur von $f'(s, t, Y)$, Gl. (39a).

$$G_{IIIa}: \quad h_{IIIa} = \frac{Y}{4} \left[T_1(s, t) - \frac{1}{Y^2} T_2(s, t) \right] \quad (70)$$

²² Es ist $Q_0'(Y) = -g^2(1)/2Y$ für $Y \rightarrow 0$; weiterhin kann man $Q_0(Y) \sim |\ln Y|$ zeigen.

$$\text{mit} \quad T_1(s, t) = \frac{D^2}{W_t^3} \frac{1}{s+W_t} - \beta_t^2 \frac{1}{(s+W_t)^2}, \quad (71 \text{ a})$$

$$T_2(s, t) = (s-t) \left[\frac{D^2}{W_t^3} \frac{1}{s+W_t} + \frac{1}{(s+W_t)^2} \beta_t \left(1 - \frac{t}{W_t} \right) \right]; \quad (71 \text{ b})$$

ebenso für G_{IIIb} bei Vertauschen von s und t . Auch hier erkennt man alle Anteile von f' , bis auf das Glied $u_t^2(u_s^2)'$, das verschwindet, da in der verwendeten Stufe der Näherung $(u_s^2)' = 0$ ist.

In G_{IV} verschwinden in der verwendeten Näherung alle Glieder, und man hat $h_{IV} = 0$.

3. Diskussion von $Q'(Y)$ mit Hilfe der Näherung

3.1. Programm

a) Für $D \rightarrow 0$ gehen die in Gl. (67) bis (71) für G_I bis G_{III} explizit angegebenen $h_n(s, t, Y)$ in die entsprechenden Anteile $f'_{0,n}$ von f'_0 über. Näheres im Anhang.

b) Bei Integration dieser h_n ($n = I, II, III$) über die jeweiligen Gebiete G_n entstehen nach Gl. (47) die Näherungsfunktionen $H_n(Y)$, deren Summe nach Gl. (48) genähert $Q'(Y)$ ergibt. Diese weichen nun, wenn D klein ist, für fast alle Y beliebig wenig von Grenzfunktionen $H_n^0(Y)$ ab, die entstehen, wenn man f'_0 [explizite Form im Anhang, Gl. (A 1)] über G_n integriert

$$H_n^0(Y) = \frac{1}{4Y} \int \int_{G_n} g^2(s, t, Y) f'_0(s, t, Y) \quad (72)$$

und aus denen sich $Q'_0(Y)$ zusammensetzt als

$$Q'_0(Y) = H_I^0(Y) + H_{II}^0(Y) + H_{III}^0(Y). \quad (73)$$

(Beim Übergang von H_n zu H_n^0 wird also nur im Integranden $D \rightarrow 0$ ausgeführt; die über $a = \sqrt{D}$ ebenfalls von D abhängigen Gebietsgrenzen bleiben unberührt. Im folgenden wird deshalb zur Verdeutlichung stets a geschrieben.)

Die genannte Stetigkeit von $H_n(Y)$ in $D=0$ gilt nun gleichmäßig für alle Y außer in $Y=0$, da $\lim_{Y \rightarrow 0} Q'_0(Y) = -\infty$ [Gl. (66)], dagegen $\lim_{Y \rightarrow 0} Q'(Y) = 0$ für alle $D \neq 0$ [Gl. (44)], und außer in der Umgebung von $Y=2$ wegen der dortigen Unstetigkeit von $Q'_0(Y)$ (es wird sich herausstellen, daß in beiden Fällen die Anteile in G_{II} verantwortlich sind). Einzelheiten in Abschn. 3.2.

c) In G_{IV} hat man $H_{IV} = 0$ wegen $h_{IV} = 0$. Wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, erhält man

durch Mitnahme weiterer als der verwendeten Glieder in der Näherung für $f'(s, t, Y)$ nicht identisch verschwindende Beiträge zu $Q'(Y)$ in G_{IV} , die aber mit $D \rightarrow 0$ für alle Y verschwinden.

Nach a) bis c) weicht dann, außer zunächst in den beiden Ausnahmegebieten von Y , $Q'(Y)$ für kleine D beliebig wenig von $Q'_0(Y)$ ab und ist somit wie dieses negativ.

d) Für $Y < a$ und $Y \approx 2$ wird $Q'(Y)$ direkt diskutiert; es zeigt sich auch hier $Q'(Y) < 0$ für kleines D (Abschn. 3.3).

Somit ist für kleines D

$$Q'(Y) < 0 \quad \text{für alle } Y.$$

Zum Vergleich von $H_n(Y)$ und $H_n^0(Y)$ wird benutzt, daß eine Funktion

$$F(D) = \int \int_G \varphi(s, t, D) \, ds \, dt \quad (74)$$

stetig in D ist, wenn der Integrand stetig in s , t und D ist, also insbesondere $\varphi(s, t, D)$ für kein D singulär; entsprechendes gilt im Fall eines einfachen Integrals. Im folgenden kommt es vor, daß zwar $\varphi(s, t, 0)$ singulär wird in $s=t=0$ [also $\varphi(s, t, D)$ unstetig in $s=t=D=0$], daß aber das Integral

$$F(0) = \int \int_G \varphi(s, t, 0) \, ds \, dt$$

eine konvergente Majorante für $F(D)$ darstellt. Damit konvergiert das nunmehr uneigentliche Integral $F(D)$ in $D \geq 0$ gleichmäßig und ist somit doch eine in $D=0$ stetige Funktion.

3.2. Diskussion der Näherungsfunktionen $H_n(Y)$

Nach Gl. (47) wird mit den $h_n(s, t, Y)$ aus Abschnitt 2.6 $H_n(Y)$ gebildet und mit $H_n^0(Y)$, Gl. (72), verglichen.

G_I : Wegen $h_I = f'_{0,I}$ (s. Anhang 1) ist trivialerweise $H_I(Y) = H_I^0(Y)$ für alle Y [man sieht außerdem sofort $H_I(Y) < 0$].

G_{IIIa} : Mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_t = \frac{D^2}{W_t^3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{W_s + W_t} = - \frac{1}{(W_s + W_t)^2} \frac{t}{W_t} \quad (75)$$

wird aus (71 a, b):

$$T_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{2+t/W_t}{s+W_t} - \frac{1}{(s+W_t)^2}, \quad (76 \text{ a})$$

$$T_2(s, t) = (s-t) \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{W_t(W_s + W_t)} + \frac{1}{(s+W_t)^2} \right]. \quad (76 \text{ b})$$

Diese Umformungen sind für die folgende Argumentation wesentlich; es müssen die Terme D^2/W^3 beseitigt werden, die für $D \rightarrow 0$ eine δ -Funktion er-

geben; dasselbe gilt später für die Diskussion von H_{II} .

H_{IIIa} ist eine Summe von (ein bis drei) Integralen der Form

$$R(D, Y) = \frac{1}{4Y} \int_{s_u}^{s_0} ds \int_{t_u}^a dt g^2(s, t, Y) \frac{Y}{4} \left[T_1(s, t) - \frac{1}{Y^2} T_2(s, t) \right]$$

(vgl. die Gebietsgrenzen, Abb. 6) mit $s_0 > s_u \geq a$ und teils $t_u = -a$, teils $-a \leq t_u = t_1(s) \leq a$ [s. Gl. (59 a)]. Wegen der Kleinheit des t -Intervalles kann man

$$R(D, Y) \approx \frac{1}{16} \int_{s_u}^{s_0} ds g^2(s, t_m, Y) \int_{t_u}^a dt \left[T_1(s, t) - \frac{1}{Y^2} T_2(s, t) \right] \quad (77)$$

schreiben. Dann wird mit Gl. (76 a)

$$\int_{t_u}^a T_1(s, t) dt = \frac{2+a/W_a}{s+W_a} - \frac{2+t_u/W_{t_u}}{s+W_{t_u}} - \int_{t_u}^a \frac{dt}{(s+W_t)^2} \quad (78)$$

[mit $W_a = \sqrt{a^2 + D^2}$ und $W_{t_u} = \sqrt{t_u^2 + D^2}$], sowie mit Gl. (76 b) nach mehrfacher partieller Integration

$$\int_{t_u}^a T_2(s, t) dt = \frac{(s-a)a}{W_a(s+W_a)} - \frac{(s-t_u)t_u}{(s+W_{t_u})W_{t_u}} + \frac{s}{s+W_{t_u}} - \frac{s}{s+W_a} + \int_{t_u}^a \frac{s dt}{(s+W_t)^2}. \quad (79)$$

Für $t_u = -a$ sind wegen $s \geq a > 0$ alle in Gl. (77) auftretenden Integranden stetig in s , t und D bzw. in s und D und damit auch $R(D, Y)$ stetig in D . Für $t_u = t_1(s)$ kann $t_u = 0$ werden, und damit treten in $R(D, Y)$ Integrale über s mit dem für $D=0$ unstetigen Integranden t_1/W_{t_1} auf. Mit $t_1 = r$ als neuer Variabler kann man auch diese Beiträge durch Integrale mit stetigen Integranden darstellen; z. B. gilt für den Beitrag aus Gl. (78) (mit $s = r + Y^2 + 2Y\sqrt{1+r}$)

$$\int_{s_u}^{s_0} g^2(s, t_m, Y) \frac{r}{W_r(s+W_r)} ds = \int_{-a}^a \frac{r}{W_r} \cdot \frac{g^2(s(r), t_m, Y) (1+Y/\sqrt{1+r})}{s(r)+W_r} dr,$$

und nach partieller Integration mit Hilfe von $r/W_r = dW_r/dr$ treten wegen $s(r) > 0$ für alle r nur noch stetige Integranden auf. Damit sind alle Integrale R stetig in D , und $H_{IIIa}(Y)$ geht mit $D \rightarrow 0$ stetig in $H_{IIIa}^0(Y)$ über. Das gilt gleichmäßig in Y , da H_{IIIa}^0 für alle Y stetig ist, auch für $Y=0$ (man prüft leicht nach, daß ein Anteil mit dem Faktor $1/Y^2$ für $Y < a/2$ verschwindet). Für G_{IIIb} gilt dieselbe Argumentation.

G_{II} : H_{II} wird zunächst nur im Intervall $\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} < Y < 2\sqrt{1-a}$ diskutiert, wo G_{II} Quadratform hat (s. Abschn. 2.4); die restlichen Y -Intervalle, für die G_{II} existiert, werden in Abschn. 3.3 untersucht.

Man schreibt mit Gl. (68)

$$H_{II}(Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \int_{G_{II}} \int g^2(s, t, Y) \left[b_1(s, t) + \frac{1}{Y^2} b_2(s, t) \right] ds dt \approx \frac{1}{4} g_m^2 \left[I_1 + \frac{1}{Y^2} I_2 \right] \quad (80)$$

$$\text{mit} \quad I_\nu \equiv \frac{1}{8} \int_{G_{II}} \int b_\nu(s, t) ds dt; \quad (81)$$

dabei ist $g^2(s, t, Y)$ wegen der Kleinheit des Intervalls durch eine Konstante g_m^2 ersetzt worden, z. B. $g_m = g(0, 0, Y) = g(\sqrt{1-Y^2/4})$ für $Y \leq 2$. Ganz analog wird auch H_{II}^0 geschrieben, mit einem

$$I_\nu^0 \equiv \frac{1}{8} \int_{G_{II}} \int \lim_{D \rightarrow 0} b_\nu(s, t) ds dt \quad (81 a)$$

und $\lim_{D \rightarrow 0} b_\nu(s, t)$ aus Anhang 1. Mit Gl. (69 a) berechnet man dann im betrachteten Y -Intervall

$$I_1 = \int_0^a ds \frac{a}{W_a} \frac{1}{W_s + W_a},$$

dabei wurde unter anderem die Symmetrie von $b_1(s, t)$ in s und t benutzt. Wegen $a > 0$ ist der Integrand stetig in s und D und somit I_1 stetig in $D = 0$. Der Grenzwert I_1^0 ist (dies gilt sogar für $Y \leq 2$)

$$I_1^0 = \int_0^a \frac{ds}{s+a} = \ln 2 \quad (82)$$

und offenbar ist $I_1 < I_1^0$. Dies und die Stetigkeit in $D = 0$ läßt sich hier auch direkt bestätigen; es gilt

$$I_1 = \frac{a}{W_a} \left[\ln \frac{a+W_a}{D} + \frac{W_a}{a} \ln \left(\frac{a+W_a}{W_a} \cdot \frac{D+W_a-a}{D+W_a+a} \right) \right] = \ln 2 + \frac{D^2}{2a^2} \ln D + \dots \quad \text{bei Entwicklung nach } D \ll a.$$

In der Tat ist das größte Korrekturglied negativ und verschwindet mit $D \rightarrow 0$. Bemerkenswert ist die durch die Funktion $D^2 \ln D$ verursachte nichtanalytische Abhängigkeit des I_1 von D in $D = 0$.

Weiterhin ist mit Gl. (69 b)

$$I_2 = - \int_0^a ds \left[\frac{a}{W_a} \frac{s^2}{W_s(W_s+W_a)} - \frac{a}{W_s+W_a} + \int_0^a \frac{dt}{W_t+W_s} \right].$$

Die ersten beiden Integranden sind (wieder wegen $a > 0$) stetig in s und D und somit die Integrale stetig in D . Der Integrand $1/(W_s+W_t)$ ist unstetig in $s=t=D=0$, aber die Majorante

$$\int_0^a ds \int_0^a \frac{dt}{s+t}$$

konvergiert (mit dem Wert $2a \ln 2$), und nach Abschnitt 3.1 ist damit ganz I_2 stetig in $D = 0$. Der Grenzwert ist $I_2^0 = -a$. Somit geht für das ganze betrachtete Y -Intervall $H_{II}(Y)$ mit $D \rightarrow 0$ stetig in $H_{II}^0(Y)$ über.

3.3. Diskussion für kleine Y und für $Y = 2$

a) Nach Abschn. 3.2 gehen in Gl. (48) $H_I(Y)$ und $H_{III}(Y)$ für kleine D gleichmäßig in Y gegen $H_I^0(Y)$ und $H_{III}^0(Y)$. Dasselbe gilt für $H_{II}(Y)$ im Intervall $(a \approx) \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} \leq Y \leq 2\sqrt{1-a}$.

b) Für kleine Y ($Y < a$) weichen dagegen $H_{II}^0(Y)$ und $H_{II}(Y)$ auch für kleines D noch stark voneinander ab; $H_{II}(Y)$ konvergiert hier mit $D \rightarrow 0$ ungleichmäßig in Y gegen $H_{II}^0(Y)$:

Es werde das Intervall $0 \leq Y \leq \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$ betrachtet. Dann gilt im Teilintervall

$$0 < Y < \sqrt{1+a} - 1 \quad (\approx a/2)$$

$$H_{II}^0 = \frac{g_m^2}{4} \left[\frac{Y \ln Y}{\sqrt{1-Y^2/4}} + O(Y) - \left(\frac{2}{Y} + 1 \right) \right] \quad (83)$$

(Herleitung durch explizite Integration im Anhang), dagegen

$$H_{II} = \frac{g_m^2}{4} [\text{const} \cdot Y + O(Y^2)] \quad (84)$$

(Herleitung durch Entwicklung um $Y=0$ im Anhang). Für $Y \rightarrow 0$ wird daher H_{II}^0 wie $-1/Y$ singu-

lär [vgl. dasselbe Verhalten von Q_0' , Gl. (66)], jedoch ist $\lim_{Y \rightarrow 0} H_{II}(Y) = 0$ [vgl. dasselbe Verhalten von Q' , Gl. (44)].

Zur direkten Diskussion von $Q'(Y)$ für kleine Y wird um $Y=0$ entwickelt:

$$Q'(Y) = Q'(0) + Q''(0) \cdot Y + \dots$$

Wegen $Q'(0) = 0$ [Gl. (44)] und der Kleinheit des Y -Intervalls ist dann in guter Näherung

$$Q'(Y) \approx Q''(0) \cdot Y.$$

Zu bestimmen ist das Vorzeichen von $Q''(0)$. Nach Gl. (36) ist

$$Q''(0) = \int_0^\infty dy \int_{-1}^1 dx g^2(y) y^2 f''(0, y, x).$$

Man berechnet $f''(0, y, x)$ aus Gl. (39 a) durch nochmalige Differentiation nach Y . Im Ergebnis kann man die x -Integration einfach ausführen und erhält für $Q''(0)$ ein Integral, dessen Integrand über $\xi(y)$, $E(y)$ und $u^2(y)$ nur noch von y abhängt. Mit $\xi(y)$ als neuer Variabler werden dann in den drei Teilgebieten $-1 \leq \xi \leq a$, $|\xi| \leq a$ und $\xi \geq a$ die Näherungsformeln Gl. (49), (50), (53) und (54) eingesetzt. Nach längerer elementarer Rechnung erhält man

$$Q''(0) = - \frac{\text{const}}{D^2} [1 + O(D)] \quad (85)$$

mit einer positiven Konstanten. Damit ist $Q'(Y)$ auch für kleine Y negativ und $Q(Y)$ zeigt eine starke negative Krümmung in $Y = 0$.

c) Für $Y = 2$ springt $Q_0'(Y)$ unstetig um $\frac{1}{4} g^2(0)$ (Abschn. 2.5), und ein Vergleich von $Q_0'(Y)$ und $Q'(Y)$ wie in Abschn. 3.2 ist nicht möglich. $Q'(Y)$

wird daher im Intervall $2\sqrt{1-a} < Y < 2\sqrt{1+a}$ direkt diskutiert.

Die Unstetigkeit in $Q_0'(Y)$ stammt nun vom Anteil H_{II}^0 der Zerlegung Gl. (73), denn in $H_{II}^0(Y)$ ist im betrachteten Y -Intervall

$$I_1^0(Y) = \ln 2 \quad \text{für } Y < 2,$$

$$\text{aber} \quad \lim_{Y \rightarrow 2+0} I_1^0(Y) = \ln 2 - 1,$$

und $I_2^0(Y)$ stetig in $Y=2$, wie durch explizite Berechnung der beiden Integrale folgt²³. Somit ist

$$H_{II}^0(2-0) - H_{II}^0(2+0) = \frac{1}{4} g_m^2(0) = Q_0'(2-0) - Q_0'(2+0)$$

und der Rest

$$R_0(Y) \equiv H_I^0 + H_{III}^0 + \frac{g_m^2}{4Y^2} I_2^0(Y)$$

von $Q_0' = R_0(Y) + \frac{1}{4} g_m^2 I_1^0(Y)$ ist stetig in Y im gesamten Intervall. Das Gesamtvorzeichen von Q_0' ist negativ für alle Y , insbesondere ist also im Teilintervall $2\sqrt{1-a} \leq Y \leq 2$

$$R_0(Y) + \frac{1}{4} g_m^2 \ln 2 < 0 \quad (86)$$

und wegen der Stetigkeit von R_0 im gesamten Intervall und der Kleinheit des Intervalls gilt dann Gl. (86) auch für den Rest $2 \leq Y \leq 2\sqrt{1+a}$ des Intervalls.

$Q'(Y)$ ist nach Gln. (48) und (80) gegeben durch

$$Q'(Y) = R(Y) + \frac{1}{4} g_m^2 I_1(Y)$$

mit

$$R(Y) \equiv H_I(Y) + H_{III}(Y) + \frac{1}{4} g_m^2 I_2(Y).$$

Nun geht mit $D \rightarrow 0$ $R(Y)$ im vorliegenden Intervall gleichmäßig in Y in $R_0(Y)$ über; denn dies gilt für H_I und H_{III} nach Abschn. 3.2 für alle Y , also auch hier, und für $I_2(Y)$ kann man den gleichmäßigen Übergang zu $I_2^0(Y)$ explizit mit derselben Argumentation wie für das in Abschn. 3.2 betrachtete Y -Intervall zeigen (es ändern sich gegenüber dort die Integrationsgrenzen).

In der Umgebung von $Y=2$ lautet das verbleibende $I_1(Y)$

$$\begin{aligned} I_1(Y) &= \frac{1}{4} \int_{s_0}^a ds \int_{t_1(s)}^a dt \beta_s \frac{\partial}{\partial t} \frac{\beta_t}{W_s + W_t} \\ &= \frac{1}{4} \int_{s_0}^a ds \beta_s \left[\frac{\beta_a}{W_s + W_a} - \frac{\beta_{t_1}}{W_s + W_{t_1}} \right], \end{aligned} \quad (87)$$

²³ Def. von I_p^0 nach Gl. (81a). Man erhält mit den jeweils vorliegenden Grenzen von G_{II}

$$\begin{aligned} I_1^0 &= \begin{cases} \ln 2 \\ \ln 2 - \frac{2Y}{\sqrt{Y^2-4}} \arctan \sqrt{\frac{Y-2}{Y+2}} \end{cases}, \\ I_2^0 &= \begin{cases} -a \\ -a + Y^2 - 2Y \end{cases} \quad \text{für } \begin{cases} Y < 2 \\ 2 < Y < 1 + \sqrt{1+a} \end{cases}. \end{aligned}$$

wobei $-a < s_0 < 0$ und $t_1(s)$ aus Gl. (59a)²⁴.

Der 2. Term in der letzten Form von Gl. (87) ist stets negativ; für $Y=2$ wird sein Betrag mit $D \rightarrow 0$ beliebig groß, da bei $D=0$ wegen $s+t_1 = 2s+4-4\sqrt{1+s}$ das Integral in $s=0$ divergiert. Diese Auszeichnung des Wertes $Y=2$ hängt mit der Unstetigkeit von I_1^0 in $Y=2$ zusammen. In jedem Falle aber gilt

$$I_1(Y) < \frac{1}{4} \int_{s_0}^a ds \beta_s \frac{\beta_a}{W_s + W_a},$$

und man zeigt leicht

$$\frac{1}{4} \int_{s_0}^a ds \beta_s \frac{1}{W_s + W_a} < \int_0^a \frac{ds}{s+a} = \ln 2$$

unter Benutzung der expliziten Form von s_0 . Schließlich läßt sich die Ungleichung $I_1 < \ln 2$ auch noch auf das gesamte betrachtete Y -Intervall erweitern, und damit ist dort

$$Q'(Y) < R(Y) + \frac{1}{4} g_m^2 \ln 2 \equiv M(Y)$$

und wegen $R(Y) \rightarrow R_0(Y)$ und Gl. (86) ist für kleine D $M(Y)$ negativ im gesamten Intervall, und somit auch $Q'(Y)$.

4. Diskussion und numerisches Beispiel

4.1. Diskussion

Wie in den letzten beiden Abschnitten im einzelnen ausgeführt wurde, fällt $Q(Y)$ monoton mit Y für alle Y und damit nach Gl. (35) $A(K)$ monoton mit K für alle K . Zusammen mit dem Ergebnis $A(0) < 1$ von T [Gl. 23] bedeutet dies, daß $A(K) < 1$ für alle K . Nach Gln. (24) und (25) gilt dann für die in Gl. (22) definierte Funktion \bar{A}

$$\bar{A}(K, \beta) < 1,$$

und die Bedingung für Singularität der τ -Matrix ist für kein K und $\beta > 0$ erfüllt. Dies ist das in der Einleitung erwähnte Ergebnis. Die Beschränkung auf positive Werte des Energieparameters β ist nach der Definition von β als Summe zweier Quasiteilchenenergien gerechtfertigt [Gl. (16)]. Im Gegen-

²⁴ Bei $s_0 = a + Y^2 - 2Y\sqrt{1+a}$ liegt der Schnittpunkt von $t_1(s)$ mit der Geraden $t = +a$. Exakt gilt Gl. (87) für das $Y=2$ einschließende Teilintervall

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a} \leq Y \leq 1 + \sqrt{1+a}.$$

satz zur τ -Matrix besitzt nach HAYES⁵ die t -Matrix für einen kleinen, aber endlichen Bereich um $K=0$ stets eine Singularität²⁵.

Wesentlich für die gezeigte Nichtsingularität der τ -Matrix ist zunächst $A(0) < 1$, also nach Gl. (23) die Existenz einer Energielücke $\Delta \neq 0$ [keinen Einfluß hat dagegen der bei $\Delta \neq 0$ stetige Verlauf von $u^2(k)$ in $k=k_f$, im Gegensatz zum unstetigen Verlauf der für $\Delta=0$ aus u^2 entstehenden Sprungfunktion $\varepsilon(k)$, denn für $A(0) < 1$ ist nach Gl. (23) nur wichtig, daß nicht $u^2(k) = 1$ für *alle* k , unabhängig davon, ob es stetig ist oder nicht]. Das monotone Fallen von $A(K)$ dagegen, die zweite für die Nichtsingularität wesentliche Eigenschaft, hängt offenbar nicht entscheidend von $\Delta \neq 0$ ab; denn nach dem verwendeten Beweisverfahren zeigt $A(K)$ im wesentlichen deshalb dieses Verhalten, weil auch $A_0(K)$ monoton fällt.

4.2. Numerisches Beispiel

Als Beispiel für die in den vergangenen Abschnitten erhaltenen Eigenschaften von $Q'(Y)$ seien $Q(Y)$

[Gl. (36)] und $Q_0(Y)$ [Gl. (42)] für das spezielle

$$g(k) = k_f^2 / (k^2 + \beta^2), \quad \beta > 0 \quad (88)$$

numerisch berechnet. Die Funktion (88) ist die FOURIER-Transformierte eines YUKAWA-Potentials

$$\exp(-\beta r) / 4\pi r,$$

der positive Parameter β (nicht zu verwechseln mit dem früheren Energieparameter β aus Abschn. 1) wäre als die Reichweite der Kraft im Ortsraum zu deuten. Der FERMI-Impuls k_f ist in Gl. (88) eingefügt, um $g(k)$ dimensionslos zu machen; in der Variablen y [Gl. (28)] hat man dann

$$g(y) = 1 / (y^2 + A^2), \quad A = \beta / k_f. \quad (89)$$

Für den hier stets vorliegenden Fall geringer Dichte nehmen wir $A \gg 1$ an, für die Rechnung wurde $A=10$ gesetzt. Ferner sei $D_0 = 10^{-3}$ gewählt, das bedeutet eine kleine Kopplungskonstante μ [s. Gl. (31) und Anm. 19]; ihr genauer Wert interessiert hier nicht.

Mit dem Potential Gl. (89) läßt sich $Q_0(Y)$ integrieren; das etwas umständliche Ergebnis ist

$$Q_0(Y) = \begin{cases} \frac{1}{(4A^2 + 4 - Y^2)^2} \left[-\sqrt{4 - Y^2} \ln \frac{Y+2-\sqrt{4-Y^2}}{Y+2+\sqrt{4-Y^2}} + \frac{4A^2 - (4 - Y^2)}{2A} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{Y+2}{2A} \right) \right] & \text{für } Y \leq 2 \\ \frac{1}{2A^3} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2}{A} \right) & \text{für } Y = 2 \\ \frac{4}{(4A^2 + 4 - Y^2)^2} \left[\frac{4A^2 + Y^2 - 4}{2A} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{Y-2}{2A} - \arctan \frac{Y+2}{2A} \right) \right. \\ \quad \left. - 2\sqrt{Y^2 - 4} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \sqrt{\frac{Y-2}{Y+2}} - \arctan \sqrt{\frac{Y+2}{Y-2}} \right) \right] & \text{für } Y \geq 2, \text{ aber } Y \neq 2\sqrt{A^2 + 1} \text{ (Nullstelle des Nenners), und} \\ \frac{1}{4A^3} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sqrt{A^2 + 1} + 1}{A} + \arctan \frac{\sqrt{A^2 + 1} - 1}{A} \right) + \frac{1}{4A^2(A^2 + 1)} \left[1 - \frac{1}{4A^2(A^2 + 1)} \right] & \text{für } Y = 2\sqrt{A^2 + 1}. \end{cases} \quad (90 \text{ a, b, c, d})$$

Man prüft hieran $Q_0(Y) \sim |\ln Y|$ für $Y \rightarrow 0$ sowie die Stetigkeit von Q_0 in $Y=2$ und den Sprung in Q_0' von der Größe $\frac{1}{4}g^2(0) = 1/4A^2$ unmittelbar nach.

$Q(Y)$ wurde mit dem Potential Gl. (89) für $A=10$ und $D_0 = 10^{-3}$ numerisch berechnet auf der IBM 650²⁶. Abb. 8 zeigt den Verlauf von $Q(Y)$ und

$Q_0(Y)$; die Werte für $Q_0(Y)$ wurden aus Gl. (90) mit einer Tischrechenmaschine ermittelt. Man erkennt die angegebenen allgemeinen Eigenschaften:

$Q_0(Y)$ und $Q(Y)$ fallen beide monoton mit Y und stimmen bis auf sehr kleine Y praktisch überein; die zu erwartende Grenze der Übereinstimmung bei $Y = a = \sqrt{D} = \sqrt{D_0}g(1) = 3,14 \cdot 10^{-3}$ paßt für

²⁵ Die Energie des dort untersuchten lokalisierten Zustands der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung ist $\varepsilon = 2\varepsilon_f - \delta$ mit einem dem hier verwendeten β entsprechenden $\delta > 0$. Die dort für große K auftretende Singularität gehört zu einem Wert $\delta < 0$ ($\varepsilon > 2\varepsilon_f$), eine entsprechende Singularität tritt deshalb hier nicht auf.

²⁶ Das in y unendliche Integrationsintervall wird durch die Substitution $y = u/(1-u)$ endlich gemacht. Integriert wurde nach der SIMPSONschen Regel, starke Steigungsschwankungen bei der u -Integration wurden durch ein Programm mit variabler Schrittweite berücksichtigt.

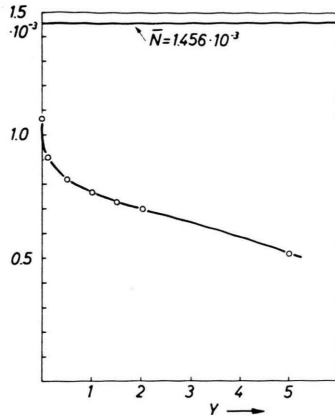


Abb. 8a. Funktion $Q(Y)$. (Kreise: berechnete Werte). $Q_0(Y)$ fällt bis auf sehr kleine Y damit zusammen. \bar{N} : s. Text.

das Beispiel recht gut. Für $Y \rightarrow 0$ geht, wie allgemeiner gezeigt wurde, $Q'_0 \rightarrow -\infty$, und $Q' \rightarrow 0$ mit starker negativer Krümmung. Der Knick in Q_0 bei $Y=2$ macht sich wegen der Kleinheit des Sprunges in der Ableitung ($\frac{1}{4} g^2(0) = 2,5 \cdot 10^{-5}$) in der Zeichnung nicht bemerkbar. Neben den Kurven $Q(Y)$ und $Q_0(Y)$ ist in Abb. 8 noch der Wert des Integrals aus der Bedingung (20) angegeben, die mit densel-

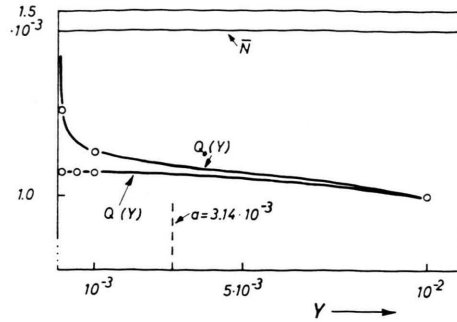


Abb. 8 b. $Q(Y)$ und $Q_0(Y)$ für kleine Y (Kreise: berechnete Werte).

ben Konstanten wie in Gl. (35) lautet

$$1 = \frac{\mu}{(2\pi)^2} \frac{k_f^3}{\varepsilon_f} \cdot \bar{N} \quad \text{mit} \quad \bar{N} = \int_0^\infty dy \frac{g^2(y) y^2}{E(y)}.$$

Im Beispiel ist $\bar{N} = 1,456 \cdot 10^{-3}$, und man sieht, daß $Q(Y) < \bar{N}$ oder $A(K) < 1$ für alle Y bzw. K .

Herrn Prof. Dr. G. LÜDERS möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre Förderung sehr danken. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine IBM 650 in der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen zu benutzen; den Mitarbeitern des Rechenzentrums danke ich für Beratung bei der Vorbereitung und Durchführung der Rechnungen.

Anhang

1. Grenzfunktionen für $h_n(s, t, Y)$ bei $D \rightarrow 0$

In den Variablen s und t lautet f'_0 [Gln. (41) und (43)]

$$f'_0 = -Y \frac{\varepsilon(s) \varepsilon(t)}{(s+t)^2} + \frac{\delta(s) \varepsilon(t) (Y/2 + (s-t)/2 Y) + \delta(t) \varepsilon(s) (Y/2 - (s-t)/2 Y)}{s+t}; \quad (\text{A. 1})$$

dabei ist $d\varepsilon(s)/ds = \delta(s)$ benutzt und s', t' nach Gl. (40) eingesetzt. Mit diesem Ausdruck sind die Gln. (67) bis (71) zu vergleichen:

G_I : Offenbar ist $h_I(s, t, Y) = f'_{0,I}(s, t, Y)$, da in $s \geq a, t \geq a$ die Anteile mit den δ -Funktionen in Gl. (A. 1) verschwinden.

G_{II} : Mit Gl. (75) lautet $b_1(s, t)$, [Gl. (69 a)], explizit:

$$b_1(s, t) = -\frac{1}{(W_s + W_t)^2} \beta_s \beta_t \left(\frac{s}{W_s} + \frac{t}{W_t} \right) + \frac{1}{W_s + W_t} \left(\beta_s \frac{D^2}{W_s^3} + \beta_t \frac{D^2}{W_t^3} \right).$$

Mit $\lim_{D \rightarrow 0} W_s = |s|$, $\lim_{D \rightarrow 0} \beta_s = 2\varepsilon(s)$, $\lim_{D \rightarrow 0} s/W_s = \text{sign } s$ und $\lim_{D \rightarrow 0} D^2/W_s^3 = 2\delta(s)$, ebenso für t , wird daraus

$$\lim_{D \rightarrow 0} b_1(s, t) = 4 \left[-\frac{2\varepsilon(s) \varepsilon(t)}{(s+t)^2} + \frac{\varepsilon(t) \delta(s) + \delta(t) \varepsilon(s)}{s+t} \right];$$

dabei ist benutzt $\varepsilon(s) \text{sign } s = \varepsilon(s)$, $\frac{\varepsilon(s) \varepsilon(t)}{(|s| + |t|)^2} = \frac{\varepsilon(s) \varepsilon(t)}{(s+t)^2}$ und $\frac{\delta(s)}{|s| + \text{const}} = \frac{\delta(s)}{s + \text{const}}$.

Für $b_2(s, t)$ erhält man auf dieselbe Weise

$$\lim_{D \rightarrow 0} b_2(s, t) = 4(s-t) \frac{\delta(s) \varepsilon(t) - \delta(t) \varepsilon(s)}{s+t} \quad [\text{man benutzt } \varepsilon(s) \varepsilon(t) (\text{sign } s - \text{sign } t) = 0],$$

und damit ist $\lim_{D \rightarrow 0} h_{II}(s, t, Y) = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{Y}{8} \left[b_1(s, t) + \frac{1}{Y^2} b_2(s, t) \right] = f'_{0,II} (= f'_0)$.

G_{IIIa} : Genau wie für G_{II} erhält man aus Gln. (70) und (71)

$$\lim_{D \rightarrow 0} h_{IIIa}(s, t, Y) = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{Y}{4} \left[T_1(s, t) - \frac{1}{Y^2} T_2(s, t) \right] = -Y \frac{\varepsilon(s) \varepsilon(t)}{(s+t)^2} + \left(\frac{Y}{2} - \frac{s-t}{2Y} \right) \frac{\delta(t) \varepsilon(s)}{s+t} = f'_{0,IIIa},$$

da in G_{IIIa} $\delta(s) = 0$ wegen $s > 0$. Dasselbe gilt mit t statt s für G_{IIIb} .

2. H_{II}^0 und H_{II} für kleine Y (zu Abschn. 3.3)

1. Mit den Grenzen a) $-a \leq s \leq s_1$; $-a \leq t \leq t_2(s)$, b) $s_1 \leq s \leq s_0$; $t_1(s) \leq t \leq t_2(s)$, c) $s_0 \leq s \leq a$; $t_1(s) \leq t \leq a$ für G_{II} im Intervall $0 < Y < a/(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})$ ($\approx a/2$), wobei $s_0 = a + Y^2 - 2Y\sqrt{1+a^2}$ und $s_1 = -a + Y^2 + 2Y\sqrt{1-a}$ der eine Schnittpunkt der Parabel mit der Geraden $t = -a$ ist, erhält man durch Quadratur

$$I_1^0 = \frac{-Y}{2\sqrt{1-Y^2/4}} \ln \frac{(\sqrt{1+a}-Y/2-\sqrt{1-Y^2/4})(1+Y/2+\sqrt{1-Y^2/4})}{(\sqrt{1+a}-Y/2+\sqrt{1-Y^2/4})(1+Y/2-\sqrt{1-Y^2/4})} + \ln \frac{2a}{2a+Y^2-2Y\sqrt{1+a}} \\ = \frac{1}{2} (Y \ln Y) / \sqrt{1-Y^2/4} + O(Y)$$

bei Entwicklung nach $Y \ll 1$, und $I_2^0 = -(2Y + Y^2)$. Daraus folgt Gl. (83).

2. Man entwickelt $I_r(Y)$, [Gl. (81)], mit den Grenzen wie eben, nach Y um $Y=0$. Wegen $G_{II}(s, t, 0) = 0$ ist $I_r(0) = 0$. Differentiation nach Y liefert

$$I_r'(0) = \frac{\partial}{\partial Y} I_r(Y) \Big|_{Y=0} = \int_0^a ds \sqrt{1+s} b_r(s, s),$$

also $I_1(0) = \text{const}_1 \neq 0$ und $I_2(0) = 0$ wegen $b_2(s, s) = 0$ [Gl. (69b)]. Nochmaliges Differenzieren von $I_2(Y)$ liefert nach elementarer Rechnung $I_2''(0) = 0$, aber $I_2'''(0) = \text{const}_3 \neq 0$. Somit hat man als Entwicklungen um $Y=0$

$$I_1 = \text{const}_1 \cdot Y + \dots, \quad I_2(Y) = \text{const}_3 \cdot Y^3 + \dots,$$

woraus sofort Gl. (84) folgt.